



آشنایی با غربال اراتستن

۴۱. در کلاس اجرای برنامه‌ای کامپیوتری را دیدی. این برنامه n را می‌گیرد و تعیین می‌کند از ۱ تا n کدام عددها اول‌اند. حدس می‌زنی این برنامه چطور کار می‌کند و الگوریتمش چیست؟ فکر کن و بنویس.

۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰

۴۲. الف) فلوجارت صفحه ۲۵ کتاب درسی، الگوریتم «غربال اراتستن» را نشان می‌دهد. در این فلوجارت، تغییرات زیر را انجام بده. سپس آن را بخوان و درک کن.

مضرب‌های بزرگ‌تر از خودش را خط بزنید. ← مضرب‌های بزرگ‌تر از خودش را که هنوز خط نخورده‌اند، تا آخر فهرست عددها خط بزنید. سپس به ابتدای فهرست برگردید.



الگ



ب) با کمک یکدیگر الگوریتم را پای تخته اجرا خواهیم کرد. پس صبر کن!
ج) الگوریتم را روی جدول عددهای ۱ تا ۵۰ در صفحه ۲۴ کتاب درسی اجرا کن. با دقت.

۴۳. «غربال» یعنی چه؟ چرا این الگوریتم را «غربال» نامیده‌اند؟

فیلترینگ اعداد اول! ← اعداد غیر اول رد می‌شوند!

۴۴. الگوریتم غربال را به خاطر بسپار طوری که بتوانی آن را بدون اشتباه بیان کنی.

۴۵. الف) در جدول عددهای زیر، الگوریتم غربال را اجرا کن. عددها را به ترتیب زمانی خط خوردنشان، بنویس.

ب) عددهایی که خط می‌خورند، به ترتیب زمانی:

مضرب ۲، مضرب ۳، مضرب ۵، مضرب ۷

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰

ب) وقتی مضرب‌های ۲ را که بزرگ‌تر از ۲ هستند خط می‌زنیم، آیا عددها با فاصله یکسانی خط می‌خورند؟ اگر بله، چندتا چندتا؟ ۲ تا ۲ تا

ج) همان سؤال قسمت ب درباره عدد ۳. ۳ تا ۳ تا

د) همان سؤال قسمت ب درباره عدد ۵. ۵ تا ۵ تا

ه) در زمان خط زدن مضرب‌هایی از ۲ که بزرگ‌تر از ۲ هستند، کوچک‌ترین عددی که خط می‌زنیم چند است؟ ۴

و) همان سؤال قسمت ب درباره عدد ۳. ۹

ز) همان سؤال قسمت ب درباره عدد ۵. ۲۵

ح) با توجه به قسمت‌های ه، و، ز حدس بزن:
* در زمان خط زدن مضرب‌هایی از عدد p که از p بزرگ‌ترند، کوچک‌ترین عددی که خط می‌زنیم p است. *



کاوش‌های بیشتر دربارهٔ غربال اراتستن

۴۶. بیا تلاش کنیم به این پرسش دربارهٔ الگوریتم غربال پاسخ دهیم: چرا «عدد خط‌خوردهٔ بعدی» حتماً عددی اول است؟
الف) فرض کن الگوریتم غربال را تا جایی اجرا کرده‌ایم:

۱ را خط زده‌ایم.
سراغ ۲ رفته‌ایم و مضرب‌های بعدیش را خط زده‌ایم. برگشته‌ایم ابتدای جدول.
سراغ ۳ رفته‌ایم و مضرب‌های بعدیش را خط زده‌ایم.
برگشته‌ایم ابتدای جدول. همین‌طور ادامه داده‌ایم. برای هریک از ۵ و ۷ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۷ و ۱۹ و ۲۳ هم مضرب‌های بعدی را خط زده‌ایم.
حالا برگشته‌ایم ابتدای جدول.

◀ به پرسش‌های زیر فقط براساس الگوریتم پاسخ بده.

- الف) آیا ممکن است عدد خط‌خوردهٔ بعدی ۲۴ باشد؟ $24 \times$ با ۲
ب) همان پرسش الف، برای عدد ۲۵ $25 \times$ با ۵
ج) همان پرسش الف، برای عدد ۲۶ $26 \times$ با ۲
د) همان پرسش الف، برای عدد ۲۷ $27 \times$ با ۳
ه) همان پرسش الف، برای عدد ۲۸ $28 \times$ با ۲
و) همان پرسش الف، برای عدد ۲۹ $29 \checkmark$

◀ امیدوارم حسی پیدا کرده باشی از دلیل این که

در اجرای الگوریتم غربال، «عدد خط‌خوردهٔ بعدی» حتماً عددی اول است.
پس خواه‌ناخواه فقط سراغ خط زدن مضرب‌های عددهای اول می‌رویم.

از ما بپذیر که این حرف اثبات دقیق دارد. اما امسال به دنبال اثبات دقیقش نیستیم.

۴۷. دوباره بیا تلاش کنیم به پرسشی دربارهٔ الگوریتم غربال پاسخ دهیم:

چرا کوچک‌ترین عددی که طی خط زدن مضرب‌های p خط می‌خورد، p^2 است؟

بض ۷ / ۱۴ ن غربال هستیم:

۱ را خط زده‌ایم.
سراغ ۲ رفته‌ایم و مضرب‌های بعدیش را خط زده‌ایم. برگشته‌ایم ابتدای جدول.
سراغ ۳ رفته‌ایم و مضرب‌های بعدیش را خط زده‌ایم.
برگشته‌ایم ابتدای جدول. همین‌طور ادامه داده‌ایم با عددهای ۵ و ۷.
برگشته‌ایم به ابتدای جدول. عدد خط‌خوردهٔ بعدی، ۱۱ است.

◀ بررسی کنیم که کوچک‌ترین مضربی از ۱۱ که لازم است خط بزنیم، چند است: ۱۲۱

الف) آیا لازم است 2×11 را خط بزنیم؟ چرا؟ $2 \times 11 \times$ با ۲

- ب) همان پرسش الف، برای 3×11 $3 \times 11 \times$ با ۳
ج) همان پرسش الف، برای 4×11 $4 \times 11 \times$ با ۲
د) همان پرسش الف، برای 5×11 $5 \times 11 \times$ با ۵
ه) همان پرسش الف، برای 6×11 $6 \times 11 \times$ با ۲
و) همان پرسش الف، برای 7×11 $7 \times 11 \times$ با ۷
ز) همان پرسش الف، برای 8×11 $8 \times 11 \times$ با ۲
ح) همان پرسش الف، برای 9×11 $9 \times 11 \times$ با ۹
ط) همان پرسش الف، برای 10×11 $10 \times 11 \times$ با ۲
ی) همان پرسش الف، برای 11×11 $11 \times 11 \checkmark$

◀ امیدوارم حسی پیدا کرده باشی که از دلیل این که

کوچک‌ترین عددی که طی خط زدن مضرب‌های p خط می‌خورد، p^2 (یعنی مربع p) است.

از ما بپذیر که این حرف اثبات دقیق دارد. اما امسال به دنبال اثبات دقیقش نیستیم.



۴۸. یادآوری جذر (زیرا دقایقی دیگر به جذر نیاز پیدا می‌کنیم):

(الف) حاصل هر مورد را بنویس.

$$\sqrt{64} = 8 \quad \sqrt{25} = 5 \quad \sqrt{100} = 10 \quad \sqrt{121} = 11$$

(ب) حاصل $\sqrt{31}$ به کدام یک از شکل‌های زیر است؟

$$\square 4 / \dots \quad \checkmark 5 / \dots \quad \square 6 / \dots$$

(ج) حاصل $\sqrt{147}$ به کدام یک از شکل‌های زیر است؟

$$\checkmark 12 / \dots \quad \square 11 / \dots \quad \square 10 / \dots$$

۴۹. بیا بفهمیم که چرا در الگوریتم غربال این شرط (If) آمده که «آیا مربع این عدد در میان عددهاست؟». واقعاً چرا اگر مربعش در میان عددها نبود، لازم نیست سراغ خط زدن مضرب‌های بزرگ‌تر از خودش برویم؟

فرض کن در الگوریتم غربال، n همان عدد خط‌خورده بعدی باشد (که فهمیدیم حتماً عددی اول است)، و مربع n در جدول عددها نباشد.

الف) چرا خیالتان راحت است که n مضربی در انتظار خط خوردن ندارد؟ (راهنمایی: از سؤال‌های قبل کمک بگیرید. زیرا مضرب‌های

ب) با توجه به قسمت الف، این جمله را کامل کن:

اگر مربع n در جدول عددهای ۱ تا n نباشد، می‌فهمیم که n از $\sqrt{n}$ بزرگ‌تر (کوچک‌تر؟) است.

(ج) جمع‌بندی قسمت‌های الف و ب:

الگوریتم غربال را برای عددهای ۱ تا n اجرا می‌کنیم.
عددهایی که مضربی برای خط زدن دارند، همه عددهای اولی هستند که از $\sqrt{n}$ کوچک‌ترند.

۵۰. الف) در الگوریتم غربال برای جدول عددهای ۱ تا ۱۷۲، سراغ خط زدن مضرب‌های کدام عددها می‌رویم؟ همه آن‌ها را بنویس.

۳ ۱۱ ۷ ۵ ۳ ۲

ب) همان سؤال الف، اما درباره جدول عددهای ۱ تا ۳۰۰.

۱۷ ۱۳ ۱۱ ۷ ۵ ۳ ۲

۵۱. در الگوریتم غربال برای عددهای ۱ تا ۱۳۰، آخرین عددی را پیدا کن که سراغ خط زدن مضرب‌هایش می‌رویم. راه‌حلت را بنویس.

۱۱ ← ۱۲۱ ← آخرین عدد خط خورده

۵۲. بخوان: در بعضی کتاب‌های کمک‌درسی، چنین سؤال‌هایی می‌بینی: «در اجرای غربال عددهای ۱ تا ۱۰۰، کدام عددها دو بار خط می‌خورند؟ عدد ۳۰ چند بار خط می‌خورد؟» این سؤال‌ها نادقیق‌اند و ربطی ندارند به چیزی که با هم درباره غربال یاد گرفتیم. دیدیم که در الگوریتم غربال، هر عدد حداکثر یک بار خط می‌خورد. وقتی که عددی خط بخورد، دیگر برای خط زدن سراغش نمی‌رویم.

۵۳. الگوریتم غربال را برای عددهای ۱ تا ۸۰ اجرا کردیم.

الف) در زمان خط زدن مضرب‌های هریک از عددهای زیر، کوچک‌ترین عددی که خط زدیم چند بوده است؟

$$۲۵: ۵ \quad ۴۳: ۳ \quad ۴۲: ۲$$

ب) ۸ / ۱۴ ۲ ۶۵ ۷۸ را در زمان خط زدن مضرب‌های چه عددی خط

رنگ‌ترین عددی که سراغ خط زدن مضرب‌هایش رفتیم، چند بوده است؟ ۷

۵۴. می‌خواهیم الگوریتم غربال را برای جدول عددها ۱ تا ۱۴۰ اجرا کنیم.

$$۱۳۲ > ۱۴۰$$

الف) آیا سراغ خط زدن مضرب‌های عدد ۱۳ هم می‌رویم؟ چرا؟ خیر

تا ۱۱ بسط می‌رویم!

ب) هریک از عددهای زیر در زمان خط زدن مضرب‌های کدام عدد، خط می‌خورد؟

$$۷: ۱۳۳ \quad ۲: ۱۲۲ \quad ۱۱: ۱۲۱ \quad ۳: ۱۰۵ \quad ۷: ۷۷ \quad ۵: ۵۵$$

ج) همه عددهایی را که پس از خط خوردن ۱۲۵ خط می‌خورند، بنویس. ۹ عدد

$$۷ \times ۱۹ \quad ۷ \times ۱۷ \quad ۹۱ \quad ۷۷ \quad ۴۹ \quad ۱۲۱$$



۵۶. عددی طبیعی است. الگوریتم غربال را اجرا کردیم. لازم نشد که سراغ مضرب‌های عددی اول دورقمی برویم. حداکثر چند است؟ راه‌حلت را بنویس. ۱۲۹

(الف) اولین عددی که خط زدیم $41 \times 2 =$ (ب) دومین عددی که خط زدیم $41 \times 2 =$ چه عددی را نشان می‌دهد؟

(ج) چهلین عددی کہ خط زدیم: $2 + 40 \times 2 = 82$ (د) چهل و نہمین عددی کہ خط زدیم: $2 + 49 \times 2 = 100$

(و) پنجاه و یکمین عددی که خط زدیم: ۱۵

(ح) پنجاه و ششمین عددی که خط زدیم: ۲۷

(ط) آخرین عددی که خط زدیم: $\sqrt{x|3} = \boxed{91}$

۵۵. الف) بخوان و درک کن:

(ب) حالا براساس الف، مثال زیر را کامل کن:

غریبال را در ذهنم اجرا می‌کنم: سراغ خط زدن مضرب‌های مرکب عدددهای اول کوچک‌تر از $\sqrt{N}$ می‌روم، یعنی بررسی می‌کنم

که آیا ۱۶۷ بر عددهای ۲ و ۳ **دو و ۱۱** بخش پذیر است یا نه. می فهمم که ۱۶۷ بر آن ها بخش پذیر **نیست** (هست؟ نیست؟) پس ۱۶۷ **صست** اول **صست** است؟ (تست؟)

برای بررسی اول یا مرکب بودن عدد ۱۷۹، کافی است ببینیم آیا ۱۷۹ بر عددی از عددهای ۲، ۳، ۵، ۷ بخش پذیر هست یا نه.

۲ ۳ ۵ ۷ ۱۱ ← بخش پذیر است!
اول است!

۱۱ × ۱۷ → ۱۳ ۱۱ ۷ ۵ ۳ ۲

۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ ← ۵ عدد

$$1 \leq \rho \leq \rho^*$$

تمرین های بیشتر

۶۳. همه شمارنده های هریک از عددهای زیر را بنویس.

- الف) ۱۹ و ۱۹
ب) ۱۵ ۱ ۳ ۵ ۱۵
ج) ۲۴ ۱ ۲ ۳ ۴ ۶ ۸ ۱۲ ۲۴
د) ۳۶ ۱ ۲ ۳ ۴ ۶ ۹ ۱۲ ۱۸ ۳۶
ه) ۶۳ ۱ ۳ ۷ ۹ ۲۱ ۶۳
و) ۵۰ ۱ ۲ ۵ ۱۰ ۲۵ ۵۰
ز) ۹۰ ۱ ۳ ۵ ۶ ۹ ۱۰ ۱۵ ۱۸ ۳۰ ۴۵ ۹۰
ح) ۹۹ ۱ ۳ ۹ ۱۱ ۳۳ ۹۹

۶۴. همه شمارنده های هریک از عددهای زیر را با کمک نوار تجزیه بنویس. اشکالی ندارد که آن ها را به صورت ضرب (تجزیه شده) بنویسی.

- الف) ۱۹۸ $11 \times 2 \times 3 \times 3$
ب) ۱۶۴ $2 \times 2 \times 2 \times 7$
ج) ۲۷۵ $5 \times 5 \times 11$
د) ۶۲۵ $5 \times 5 \times 5 \times 5$

۶۵. می دانیم که ۱۵ و ۹، دوتا از شمارنده های عدد n هستند. بقیه شمارنده های قطعی n را پیدا کن.۶۶. می دانیم که ۶ و ۱۵، سه تا از شمارنده های عدد a هستند. بقیه شمارنده های قطعی a را پیدا کن.۶۷. می دانیم که ۹ و ۸، سه تا از شمارنده های عدد b هستند. بقیه شمارنده های قطعی b را پیدا کن.

۶۸. دور عددهای مرکب خط بکش.

- ۱۳×۴۱ ۹۱ ۵۷ ۵۱ ۳۹ ۲۹ ۱۹ ۱۴ ۱

۶۹. نوار تجزیه عددهای زیر را به صورت توان دار بنویس. مثلاً می دانیم که نوار تجزیه ۱۲ هست $2 \times 2 \times 3$. پس می نویسیم

- الف) ۱۴ = 2×7 ب) ۲۵ = 5^2 ج) ۶۴ = 2^6 د) ۲۷ = 3^3
ه) ۳ = 3 و) ۴۸ = $2^4 \times 3$ ز) ۶۳ = $3^2 \times 7$ ح) ۱۰۲ = $2 \times 3 \times 17$
ط) ۲۱۰ = $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ی) ۱۹۲ = $2^6 \times 3$ ک) ۴۹۰ = $2 \times 5 \times 7^2$ ل) ۹۰۰۰ = $2^3 \times 3^2 \times 5^3$
م) ۱۰۵ = $3 \times 5 \times 7$ ن) ۹۱۰ = $2 \times 5 \times 7 \times 13$ س) ۱۲۱ = 11^2 ع) ۱۷ = 17

۷۰. حاصل ها را حساب کن. در بعضی موارد، استفاده از نوارهای تجزیه کمک می کند.

- الف) $(14, 21) = 7$ ب) $(48, 32) = 16$ ج) $(25, 75) = 25$ د) $(27, 63) = 9$
ه) $[22, 33] = 66$ و) $[42, 28] = 14 \times 4$ ز) $[21, 35] = 7 \times 3 \times 5$ ح) $[21, 55] = 1$
ط) $(9, 44) = 1$ ی) $(1, 24) = 1$ ک) $(4, 32) = 4$ ل) $(15, 15) = 15$
م) $[16, 32] = 32$ ن) $[1, 54] = 54$ س) $[26, 26] = 26$ ع) $[12, 14] = 13 \times 4$
ف) $(430, 344) = 14$ ص) $[430, 344] = 2 \times 5 \times 43$ ق) $(245, 18) = 1$ ر) $[245, 18] = 2 \times 5 \times 18$
ش) $(15, 12, 14) = 2$ ت) $[15, 12, 14] = 180$ ث) $[(15, 10), 20] = 20$ خ) $[(4, 6), 16] = 4$
 $(18, 12)$ $[9, 12]$
 2×172 4×84 8×43



۷۱. دور جفت عددهایی که نسبت به هم اول اند، خط بکش.

(الف) ۲۱ و ۱۵

(ب) ۱۸ و ۱۴

(ج) ۱۲ و ۱

(د) ۱۸ و ۱۳

(ه) ۲۳ و ۱۹

(و) ۲۷ و ۶۴

(ز) ۲۲ و ۲۱

(ح) ۸۶ و ۴۳

۷۲. درباره الگوریتم غربال برای عددهای ۱ تا ۲۰۰، عدد یا عددهای مناسب را جلوی هر توضیح بنویس:

(الف) اولین عددی که آن را خط می‌زنیم: ۴

(ب) دومین عددی که آن را خط می‌زنیم: ۶

(ج) کوچک‌ترین، دومین و بزرگ‌ترین عددی که در زمان خط زدن مضرب‌های ۲ که از ۲ بزرگ‌ترند، خط می‌خورد: ۴، ۶ و ۲۰۰

(د) همان قسمت ج، درباره عدد ۳: ۱۹، ۱۵ و ۹

(ه) همان قسمت ج، درباره عدد ۵: ۵، ۲۵ و ۵۵

(و) همان قسمت ج، درباره عدد ۱۱: ۱۱، ۱۲۱ و ۱۸۷

(ز) همه عددهایی که سراغ خط زدن مضرب‌هایشان می‌رویم:

(ح) صد و سومین عددی که خط می‌زنیم: ۹۹ تا مضرب ۲: ۲، ۹۹ و ۱۵۰
(ط) عددی که در زمان خط زدن مضرب‌هایش، عدد ۹۹ خط می‌خورد: ۳

(ک) همان قسمت ط، درباره عدد ۱۷۵: ۵

(ی) همان قسمت ط، درباره عدد ۱۳۵: ۳

(م) همان قسمت ط، درباره عدد ۱۶۹: ۱۳

(ل) همان قسمت ط، درباره عدد ۱۱۴۳: ۱۱

(ن) کوچک‌ترین عدد اولی که مضربی برای خط زدن ندارد: ۱۷

۷۳. درباره الگوریتم غربال برای عددهای ۱ تا ۱۵۰:

(الف) ترتیب زمانی خط خوردن عددهای ۴۹ و ۷۷ و ۸۱ و ۱۲۵ را مشخص کن: ابتدا ... بعد ... بعد ... و در آخر از همه .

(ب) عدد ۱۵ چندمین عددی است خط می‌خورد؟ چرا؟ ۱۱، ۱۲۵، ۴۹، ۷۷، ۷۴ تا مضرب ۲: ۲، ۷۴ و ۹

۷۴. (الف) می‌خواهیم از روش تقسیم استفاده کنیم تا بفهمیم عدد ۱۳۹ اول است یا نه. باید بخش‌پذیری ۱۳۹ بر چه عددهایی را بررسی کنیم؟ چرا؟ ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳

(ب) همان سؤال الف، درباره ۸۸۷ دلیل را فراموش نکن!

۷۵. با روش تقسیم، اول یا مرکب بودن هریک از عددهای زیر را مشخص کن. همه محاسبه‌ها را بنویس.

(الف) ۱۸۱

(ب) ۱۵۱

$17^2 > 181$

$13^2 > 151$

(ج) ۲۲۱ مرکب
 $17^2 > 221$
 13×17

(د) ۱۴۹ اول
 $13^2 > 149$

۷۶. عددی از ۲۱۰ بزرگ‌تر و از ۳۵۰ کوچک‌تر است. برای این که با روش تقسیم بفهمیم اول است یا نه، بخش‌پذیری آن بر کدام عددها را باید بررسی کنیم؟ چرا؟ ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷